BAB V. INTEGRAL

- Anti-turunan dan Integral TakTentu
- Persamaan Diferensial Sederhana
- Notasi Sigma dan Luas Daerah di Bawah Kurva
- Integral Tentu
- Teorema Dasar Kalkulus
- Sifat-sifat Integral Tentu Lebih Lanjut
- Substitusi dalam Penghitungan Integral Tentu

Anti-turunan dan Integral Tak Tentu

Fungsi *F* disebut anti-turunan *f* pada I apabila

$$F'(x) = f(x)$$

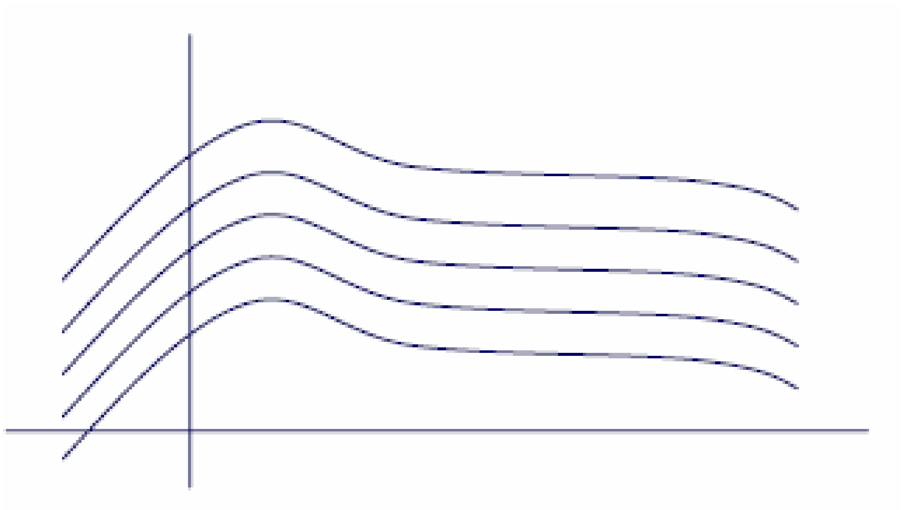
untuk setiap x є I. Sebagai contoh, $F(x) = x^4 + 1$ adalah anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada **R**. Secara umum, keluarga fungsi $F(x) = x^4 + C$ merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada **R**, karena $F'(x) = 4x^3 = f(x)$ untuk setiap x є **R**.

Keluarga fungsi anti-turunan f(x) disebut *integral tak tentu* dari *f*(x), dan dilambangkan dengan $\int f(x)\, dx$.

Jadi, sebagai contoh,

$$\int 4x^3\, dx = x^4 + C.$$

Secara grafik, keluarga fungsi anti-turunan $f(x)$ adalah keluarga fungsi yang anggotanya merupakan pergeseran ke atas atau ke bawah dari anggota lainnya. Semua anggota keluarga fungsi tersebut mempunyai turunan yang sama, yaitu $f(x)$.



Keluarga fungsi yang turunannya sama

Terkait dengan perbendaharaan turunan yang telah dipelajari sebelumnya, diperoleh beberapa teorema berikut tentang integral taktentu.

Teorema 1 (AturanPangkat).

Jika $r \in Q$ dan $r \neq -1$, maka $\int x^r\,dx = x^{r+1}/(r+1) + C$.

Contoh 1

(a) $\int x^2\,dx = x^3/3 + C$. (b) $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C$.

Teorema 2 (Integral Tak Tentu sin x dan cos x)

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

Teorema 3 (Kelinearan Integral TakTentu)

Jika *f* dan *g* fungsi dan *k* adalah konstanta, maka

$$\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx$$

dan

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Contoh 3.

$$\int (6x^2 + 1)\,dx = 2\int 3x^2\,dx + \int 1\,dx = 2.x^3 + x + C.$$

Teorema 4 (Aturan Pangkat yang Diperumum)

Jika $r \in \mathbf{Q}$ dan $r \neq -1$ dan *g* adalah fungsi yang mem-punyai turunan, maka

$$\int [g(x)]^r.g'(x)\,dx = [g(x)]^{r+1}/(r+1) + C.$$

Contoh 4. $\int (x^2+1)^5.2x\,dx = (x^2+1)^6/6 + C.$
(Disini kita menerapkan Aturan Pangkat yang Diperumum dengan $g(x) = x^2 + 1$, $g'(x) = 2x$.)

Contoh 5. Jika $g(x) = \sin x$, maka $g'(x) = \cos x$. Jadi, menurut Aturan Pangkat yang Diperumum, diperoleh

$$\int \sin x.\cos x\,dx = (\sin x)^2/2 + C.$$

Latihan.

Tentukan integral tak tentu di bawah ini.

1. $\int(x^2+ x-2)\,dx.$
2. $\int(x^3+ 1).x^2\,dx.$
3. $\int\sin^2x.\sin2x\,dx.$

Persamaan Diferensial Sederhana

Jika $F'(x) = f(x)$, maka $\int f(x)\, dx = F(x) + C$. Dalam bahasa diferensial: jika $F'(x) = f(x)$, maka

(*) $$dF(x) = F'(x)\, dx = f(x)\, dx$$

sehingga

$$\int dF(x) = \int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Persamaan(*) merupakan contoh persamaan diferensial yang (paling) sederhana.

Persamaan diferensial banyak dijumpai dalam matematika, fisika, maupun bidang ilmu lainnya.

Contoh 6.

Tentukan persamaan kurva yang melalui titik(1, 2) dan mempunyai turunan 2 x di setiap titik (x, y) yang dilaluinya.

Jawab. Misalkan persamaan kurva tersebut adalah $y = f(x)$. Maka, dalam bahasa diferensial, informasi di atas mengatakan bahwa

$$dy = 2x\ dx.$$

Integralkan kedua ruas,

$$\int dy = \int 2x\ dx.$$

Sehingga diperoleh $y + C_1 = x^2 + C_2$

atau $$y = x^2 + C,\ C = C_2 - C_1.$$

Persamaan $y = x^2 + C$ merepresentasikan keluarga kurva yang mempunyai turunan 2 x di titik (x, y).

Sekarang akan dicari anggota keluarga kurva tersebut yang melalui titik (1, 2). Dalam hal ini kita mempunyai persamaan

$$2 = 1^2 + C,$$

Sehingga mestilah C = 1. Jadi persamaan kurva yang kita cari adalah $y = x^2 + 1$.

Latihan.

Tentukan fungsi y = f(x) sedemikian sehingga $f'(x) = 3x^2 + 1$ dan $f(1) = 4$.

Notasi Sigma

Penjumlahan deret n bilangan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dilambangkan dengan notasi sigma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Sebagai contoh,

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Teorema 5 (Kelinearan Sigma)

$$\sum_{i=1}^{n} k.a_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i; \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Beberapa deret khusus diantaranya:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

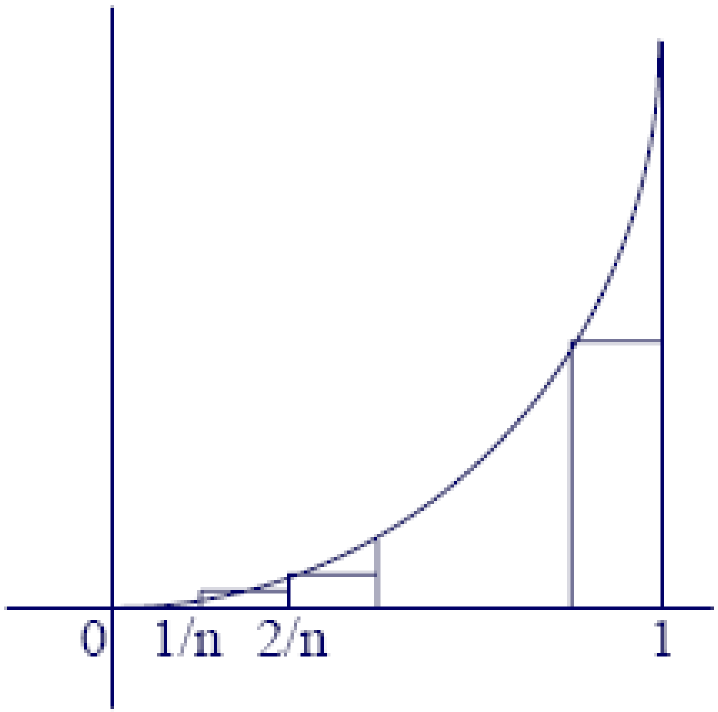
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

Deret pertama merupakan deret aritmetika n bilangan dengan suku pertama 1 dan beda 1.

Untuk pembuktian rumus deret kedua, ketiga dan keempat lihat Purcell.

Luas Daerah di Bawah Kurva

Misalkan kita ingin menghitung luas daerah di bawah kurva y = $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$. Pertama, bagi selang [0, 1] atas n selang bagian yang sama panjangnya. Lalu, luas daerah tersebut (L) kita hampiri dengan jumlah luas persegi panjang di bawah kurva,yakni



$$L \approx \frac{1}{n}\left[0^2 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right].$$

Perhatikan bahwa deret di ruas kanan dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

yang jumlahnya

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

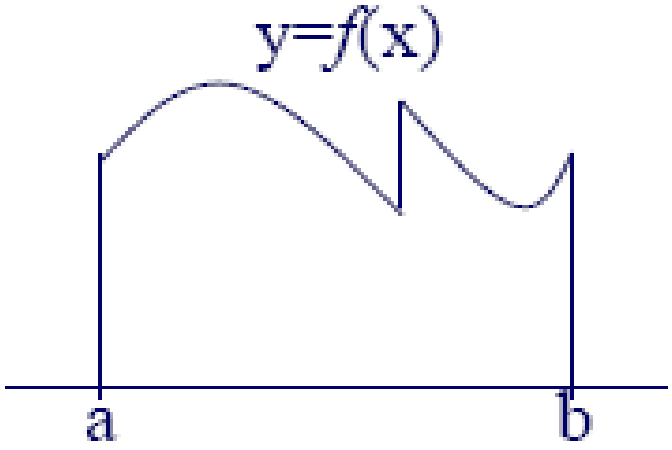
Jadi, kita peroleh hampiran

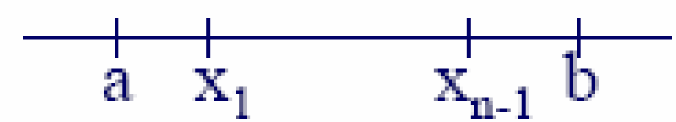
$$L \approx \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} := L_n.$$

Dari sini kita amati bahwa $L_n \to 1/3$ bila $n \to \infty$. Jadi, luas daerah yang sedang kita cari adalah 1/3.

Integral Tentu

Misalkan f : [a,b] → R kontinu kecuali disejumlah terhingga titik. Bagi selang [a,b] atas n selang bagian (tak perlu sama panjang), sebutlah titik-titik pembaginya $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Himpunan titik-titik ini disebut sebagai partisi dari [a,b]. Untuk tiap i = 1, …, n, tulis $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (= lebar selang bagian ke-i).





Dari tiap selang bagian, pilih sebarang titik $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Lalu bentuk penjumlahan berikut

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Bentuk ini dikenal sebagai *jumlah Riemann* untuk *f* terhadap partisi $P = \{a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b\}$ dan titik-titik t_i.

Contoh7. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, $P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{7}{8}$. Maka jumlah Riemann untuk *f* terhadap partisi P dan titik-titik t_i adalah

$R_P = f(\frac{1}{3}).\frac{1}{3} + f(\frac{1}{2}).(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}) + f(\frac{7}{8})(1 - \frac{3}{4}) = 1/27 + 5/48 + 49/256.$

Jumlah Riemann untuk *f* merupakan hampiran untuk luas daerah di bawah kurva y = *f*(x), x є [a,b]. Semakin 'halus' partisinya, semakin baik hampiran tersebut. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

ada, maka *f* dikatakan terintegralkan pada [a,b] dan integral tentu *f* dari a ke b didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

Catatan. |P| = maks{Δxi : i = 1, …, n}

Dalam notasi $\int_a^b f(x)dx$, kita mengasumsikan

bahwa a < b. Jika a > b, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Jika a = b, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Catat pula bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Teorema 6. Jika *f* terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik pada [a,b], maka fungsi *f* terintegralkan pada [a,b].

Akibat 7. Fungsi polinom, fungsi rasional, $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x}$, $s(x) = \sin x$, dan $c(x) = \cos x$ merupakan fungsi yang terintegralkan pada sebarang selang terbatas yang termuat dalam daerah asalnya.

Sampai disini kita hanya dapat mengatakan apakah sebuah fungsi terintegralkan pada suatu selang, dengan melihat apakah fungsi tersebut terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik.

Namun, untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut, selain dengan menggunakan definisinya, memerlukan ‘alat bantu’ yang lebih ampuh.

Teorema Dasar Kalkulus

Salah satu alat bantu untuk menghitung integral tentu adalahTeorema Dasar Kalkulus, yang berbunyi:

Jika *f* kontinu dan mempunyai anti-turunan F pada [a,b], maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Catatan. Dalam penghitungan integral tentu, notasi $F(x)]_a^b$ berarti F(b) –F(a).

Contoh 8

(a) $$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

(b) $$\int_0^{\pi/2} (\cos x)\,dx = \sin x\Big]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Teorema 9(Kelinearan Integral tentu)

$$\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Contoh 9. Dengan menggunakan kelinearan integral tentu, kita dapat menghitung

$$\int_0^2 (x^2+\sqrt{x})dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 \sqrt{x}dx = \tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Sifat-sifat Lanjut Integral Tentu

Selain kelinearan, integral tentu juga memenuhi:

Sifat penjumlahan selang:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Sifat pembandingan: Jika *f*(x) < *g*(x) pada [a,b], maka

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx.$$

Sifat keterbatasan: Jika m ≤ *f*(x) ≤ M pada [a,b], maka

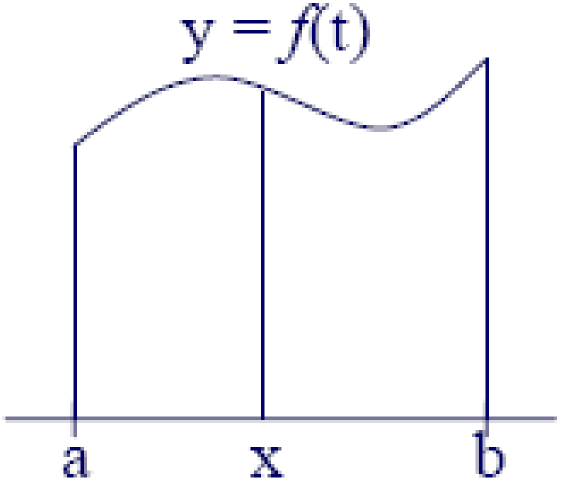
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Contoh 10. Pada [0,1] berlaku 1 ≤ √1 + x4 ≤√2; karena itu menurut sifat keterbatasan

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{2}.$$

Misalkan *f* terintegralkan pada [a,b]. Definisikan

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$



Disini, G(x) menyatakan luas daerah di bawah kurva y = f(t),a ≤ t ≤ x (lihatgambar).

Teorema Dasar Kalkulus II. G’(x) = f(x) pada[a,b]; yakni,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x),\forall x\in[a,b].$$

Contoh 11

(a) $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t^3\,dt\right) = x^3.$$

(b) $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 t^3\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x t^3\,dt\right) = -x^3.$$

(c) $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3\,dt\right) \overset{u=2x}{=} \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} t^3\,dt\right)\frac{du}{dx} = u^3.2 = 16x^3.$$

(d) $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} t^3\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_x^{1} t^3\,dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3\,dt\right)$$

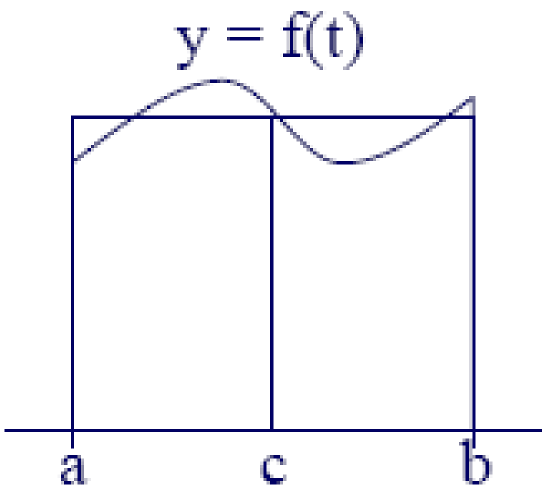
$$= -x^3 + 16x^3 = 15x^3.$$

Teorema Nilai Rata-rata Integral

Jika *f* kontinu pada [a,b], maka terdapat c ϵ [a,b] sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

<u>Catatan</u>. Nilai *f*(c) dalam teorema ini disebut nilai rata-rata integral *f* pada [a,b] (lihatgambar). Perhatikan bahwa luas daerah dibawah kurva y = f(t), t ϵ [a,b], sama dengan *f*(c)(b–a).



Contoh 12. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Maka

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Jadi nilai rata-rata integral *f* pada [0,1] adalah ⅓.

Latihan. Tentukan nilai rata-rata integral $f(x) = 4x^3$ pada [1,3].

Substitusi dalam Penghitungan Integral Tentu

Misalkankitainginmenghitungintegral berikut

$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + x}.(2x+1)dx.$$

Dengan menggunakan Aturan Pangkat yang Diper-umum, kita dapat menghitung integral tak tentunya:

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C.$$

Dengan demikian, integral tentu tadi dapat dihitung:

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)\,dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{2}{3}(20)^{3/2}.$$

Integral semacam ini, baik integral tentu maupun integral tak tentu, dapat pula dihitung dengan teknik substitusi, yang akan kita bahas selanjutnya.

Sebagai contoh, untuk menghitung integral tak tentu $\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx$, kita gunakan substitusi peubah $u = x^2 + x$, sehingga $du = (2x + 1)dx$ dan integral di atas menjadi $\int u^{1/2}\, du$. Dengan Aturan Pangkat, kita peroleh

$$\int u^{1/2}\, du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C.$$

Substitusikan kembali $u = x^2 + x$, kita dapatkan

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C,$$

sebagai mana yang kita peroleh sebelumnya dengan Aturan Pangkat yang Diperumum.

Sekarang, untuk menghitung integral tentu

$$\int_0^4 (x^2+x)^{1/2}(2x+1)\,dx,$$

kita lakukan substitusi seperti tadi: $u = x^2 + x$, $du = (2x + 1)dx$. Selanjutnya kita perhatikan efek substitusi ini terhadap kedua batas integral. Pada saat $x = 0$, kita peroleh $u = 0$; sementara pada saat $x = 4$, kita dapatkan $u = 20$. Dengan demikian

$$\int_0^4 (x^2+x)^{1/2}(2x+1)\,dx = \int_0^{20} u^{1/2}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^{20} = \tfrac{2}{3}(20)^{3/2},$$

sama seperti yang kita peroleh sebelumnya.

<u>Catatan</u>. Dalam menghitung integral tentu dengan teknik substitusi, kedua batas integral pada umum-nya berubah dan kita dapat menghitung integral dalam peubah baru tanpa harus mensubstitusikan kembali peubah lama.

Secara umum, dengan melakukan substitusi u = g(x), du = g'(x)dx, kitaperoleh

Integral taktentu: $\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)\, du$.

Integral tentu: $$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Latihan. Hitung integral tentu/tak tentu berikut:

1. $\int \sqrt{3x+2}\,dx.$
2. $\int \cos(3x+2)\,dx.$
3. $\int_0^1 (3x+2)^3\,dx.$
4. $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$
5. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(\sqrt{t}+1)^3}\,dt.$

SOAL-SOAL BAB V

5.1 no. 1, 5, 10, 15, 22, 23, 32, 33.

5.2 no. 5, 13, 15.

5.3 no. 1, 9, 21, 25.

5.4 no. 1,9,11,19.

5.5 no. 1, 11, 21, 25.

5.6 no. 1, 7, 12, 15, 22.

5.7 no. 1, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 30.

5.8 no. 5, 8, 17, 20, 25, 32.